المحاضرة ④ المصفوفات MATRICES تمارين متنوعة + مقلوب مصفوفة

تمارين متنوعة:

التمرين الأول : لتكون المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و المطلوب حساب :

❶ $A.B$ ❷ $B.A$ ❸ A^T ❹ $B.A^T$

❶

$$A_{2\times3}.B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8+3 & 0-6+6 & -1+2+0 \\ -4+0+4 & 0+0+8 & 2+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times3}.B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

❷

$B_{3\times\boxed{3}}.A_{\boxed{2}\times3}$ $\quad 2 \neq 3 \rightarrow$ العملية غير ممكنة

❸

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

❹

$$B.A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-3 & -4+0+4 \\ 4-6+3 & -8+0+4 \\ 1+4+0 & -2+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

التمرين الثاني : عيّن العددين a, b لتكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ حلاً للمعادلة المصفوفية $A^2 + aA + bI = 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

نعوض A^2, A في المعادلة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5+2a+b & 4+a+0 \\ 4+a+0 & 5+2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 5+2a+b=0 \\ 4+a+0=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a=-4 \\ b=+3 \end{matrix}$$

التمرين الثالث : لتكون المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ و المطلوب : $B.A$, $A.B$ ماذا تلاحظ؟

$$A.B = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -54 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن :

1) $A.B \neq B.A$ و ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية.

2) رغم أن $A \neq 0$ و $B \neq 0$ إلا أن $B.A = 0$ أي ليس من الضروري أن تكون إحدى المصفوفتين أو كلتاهما صفرية حتى يكون حاصل الضرب لهما مساوياً المصفوفة الصفرية.

التمرين الرابع : لتكون المصفوفات $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و المطلوب حساب : $A.C$, $A.B$ ماذا تلاحظ؟

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A.C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن : $A.B = A.C$ رغم أن $B \neq C$

التمرين الخامس : لتكون $B=\begin{bmatrix}cos\beta & -sin\beta\\ sin\beta & cos\beta\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}cos\alpha & -sin\alpha\\ sin\alpha & cos\alpha\end{bmatrix}$ و المطلوب حساب :
$B.A$, $A.B$ ماذا تدعى هذه الحالة؟

$$A.B=\begin{bmatrix}cos\alpha & -sin\alpha\\ sin\alpha & cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos\beta & -sin\beta\\ sin\beta & cos\beta\end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta & -cos\alpha sin\beta - sin\alpha cos\beta\\ sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta & -sin\alpha sin\beta + cos\alpha cos\beta\end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta & -(cos\alpha sin\beta + sin\alpha cos\beta)\\ sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta & cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos(\alpha+\beta) & -sin(\alpha+\beta)\\ sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

و بنفس الأسلوب نجد :

$$B.A=\begin{bmatrix}cos(\alpha+\beta) & -sin(\alpha+\beta)\\ sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

ندعو المصفوفتان A,B في هذه الحالة بالمصفوفتين المتبادلتين.

التمرين السادس : أثبت أن المصفوفة A هرميتية تخالفية $A=\begin{bmatrix}3i & 3+4i & 4-5i\\ -3+4i & -4i & 5+6i\\ -4-5i & -5+6i & 0\end{bmatrix}$

- $A=\begin{bmatrix}3i & 3+4i & 4-5i\\ -3+4i & -4i & 5+6i\\ -4-5i & -5+6i & 0\end{bmatrix}$
- $\bar{A}=\begin{bmatrix}-3i & 3-4i & 4+5i\\ -3-4i & +4i & 5-6i\\ -4+5i & -5-6i & 0\end{bmatrix}$
- $(\bar{A})^T=\begin{bmatrix}-3i & -3-4i & -4+5i\\ 3-4i & +4i & -5-6i\\ 4+5i & 5-6i & 0\end{bmatrix}$
- $(\bar{A})^T=-\begin{bmatrix}3i & 3+4i & 4-5i\\ -3+4i & -4i & 5+6i\\ -4-5i & -5+6i & 0\end{bmatrix}=-A$
- $(\bar{A})^T=-A\rightarrow$ مصفوفة هرميتية تخالفية

معكوس مصفوفة (INVERSE OF MATRIX) :

أولاً : إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإننا ندعو المصفوفة B التي تحقق العلاقة : $A \cdot B = B \cdot A = I$ مصفوفة معاكسة للمصفوفة A و نرمز لها بالرمز A^{-1}

ثانياً : الخطوات العامة لإيجاد مقلوب مصفوفة A مربعة غير شاذة:

1) نحسب محدد المصفوفة A (يجب أن يكون $detA = |A| \neq 0$).
2) نوجد مصفوفة المتممات الجبرية (A_{ij}).
3) نوجد المصفوفة المساعدة $adi(A) = (A_{ij})^T$
4) نطبق القانون : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adi(A)$

التمرين الأول : لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 8 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (+1)\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} = (7 \times 13) - (9 \times 8) = 19$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(9+4) = +13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(6+2) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (+1)(12-9) = +3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1+8) = -9$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(3+7) = +7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6-1) = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (+1)(-2+36) = +34$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-6+24) = -18$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = (+1)(27-6) = +21$$

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} 13 & -8 & 3 \\ -9 & 7 & -5 \\ 34 & -18 & 21 \end{bmatrix} \rightarrow adi(A) = (A_{ij})^T = \begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adi(A) = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

التمرين الثاني : لتكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = (7 \times 8) - (5 \times 11) = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (+1)(-6+4) = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(0-3) = +3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (+1)(0+9) = +9$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-4-4) = +8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (+1)(-14+3) = -11$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(28+6) = -34$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (+1)(-2-3) = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-7-0) = +7$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (+1)(21-0) = +21$$

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 8 & -11 & -34 \\ -5 & 7 & 21 \end{bmatrix} \rightarrow adi(A) = (A_{ij})^T = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adi(A) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{bmatrix}$$

التمرين الثالث : ناقش بحسب قيم الوسيط λ وجود معكوس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (+3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3(\lambda + 4)$$

- يكون للمصفوفة معكوس عندما : $\lambda \neq -4$ $\rightarrow$ $detA = 3(\lambda + 4) \neq 0$ أي : $\lambda \in \mathbb{R}/\{-4\}$
- لا يكون للمصفوفة معكوس عندما : $\lambda = -4$ $\rightarrow$ $detA = 3(\lambda + 4) = 0$

ثالثاً : خواص معكوس مصفوفة

1) $I^{-1} = I$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

5) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

6) $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots \cdot A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdot {A_3}^{-1} \cdot {A_2}^{-1} \cdots \cdot {A_1}^{-1}$

حالات خاصة :

❶ معكوس المصفوفة من المرتبة الثانية: $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ يعطى بالقانون : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ أي

بعبارة مختصرة : نبدل بين موضعي عنصري القطر الرئيس ، نغير إشارة عنصري القطر الثانوي ، نقسم على قيمة المحدد غير المعدوم.

مثال :احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

الحل : معكوس هذه المصفوفة هو $A^{-1} = \frac{1}{(3\times6)-(2\times5)}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

❷ معكوس المصفوفة القطرية من المرتبة (n) : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

نحصل على معكوس المصفوفة القطرية بقلب عناصر القطر الرئيسي فقط . أي $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

❸ معكوس المصفوفة المثلثية من المرتبة (3) حصراً :

1) مثلثية عليا : $A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} & \frac{\begin{vmatrix} b & d \\ c & e \end{vmatrix}}{acf} \\ 0 & \frac{1}{c} & \frac{-e}{cf} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{bmatrix}$

2) مثلثية سفلى : $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-b}{ac} & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{\begin{vmatrix} b & d \\ c & e \end{vmatrix}}{acf} & \frac{-e}{cf} & \frac{1}{f} \end{bmatrix}$